PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO PARA SISTEMAS LINEARES EM TEMPO CONTÍNUO

Lucas Padilha dos Santos[1], Diogo Ramalho de Oliveira[1]

[1]Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Mato Grosso do Sul (IFMS) – Três Lagoas - MS

luccas_life@outlook.com, diogo.ramalho@ifms.edu.br

Resumo

Nas últimas décadas é cada vez mais frequente a utilização de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* – LMIs) para o projeto de controle de sistemas dinâmicos, em busca de estabilidade e um melhor desempenho do sistema controlado. Além disso, as LMIs são amplamente aplicadas no controle robusto de sistemas sujeitos a falhas ou que possuam incertezas em algum parâmetro. Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo apresentar um projeto de controle robusto para o equipamento *2D ball balancer*. O projeto de controle e as simulações são feitos utilizando o *software* gratuito *SciLab*. Uma implementação prática no sistema real comprova a validade da metodologia.

Palavras-chave: LMIs, controle robusto, *2D ball balancer*.

Introdução

O projeto de controle baseia-se na teoria de Lyapunov e utiliza LMIs para garantir estabilidade ao sistema controlado. O sistema *2D ball balancer* é representado por um sistema linear em tempo contínuo através de espaço de estados.

O sistema dinâmico a ser controlado é o *2D ball balancer*, pertencente ao Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da UNESP – Campus Ilha Solteira, que está apresentado na Figura 1.

Figura 1. Sistema *2D ball balancer* pertencente ao LPC-UNESP-Ilha Solteira.

O sistema *2D ball balancer* é fabricado pela Quanser® e seu modelo esquemático, referente ao eixo x, está representado na Figura 2. A sua representação referente ao eixo y é dada da mesma forma.

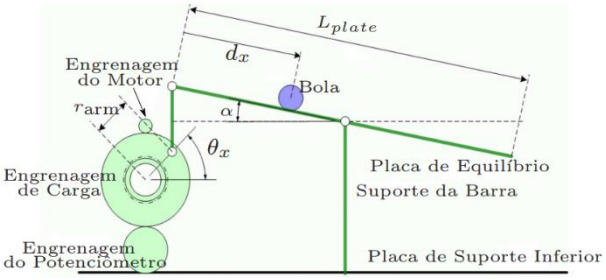

Figura 2. Modelo matemático do eixo x do *2D ball balancer* (Quanser, 2008).

O sistema consiste em uma placa quadrada montada sobre dois servomotores na qual uma esfera movimenta-se com dois graus de liberdade, sendo que o ângulo de inclinação da placa pode ser ajustado para equilibrar a bola sobre uma posição plana desejada. Uma câmera superior é utilizada para medir a posição da bola (Souza, 2014).

Metodologia

Inicialmente, considere o seguinte sistema linear em tempo contínuo descrito através de espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{2}$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$ é a derivada temporal do vetor de estado $x(t)$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ são matrizes conhecidas.

Modelo do sistema *2D ball balancer*

O sistema *2D ball balancer* pode ser representado através de espaço de estados (eixo x), tal que o vetor de estados $x(t)$ é dado por

$$x(t) = \begin{bmatrix} d_x(t) \\ \dot{d}_x(t) \\ \theta_x(t) \\ \dot{\theta}_x(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

sendo que $d_x(t)$ é a posição da bola, $\dot{d}_x(t)$ é a velocidade da bola, $\theta_x(t)$ é a posição angular do servomotor e $\dot{\theta}_x(t)$ é a velocidade angular do servomotor. O modelo matemático

linearizado do sistema *2D ball balancer* (Quanser, 2008) são dados por duas equações apresentadas a seguir.

A primeira equação representa a dinâmica entre a bola e a placa, relacionando a aceleração da bola $\ddot{d}_x(t)$ com a posição angular do servomotor $\theta_x(t)$, tal que

$$\ddot{d}_x(t) = K_{bb}\theta_x(t) \tag{4a}$$

sendo que

$$K_{bb} = \frac{2m_b g r_{arm} r_b^2}{L_{plate}(m_b r_b^2 + J_b)} \tag{4b}$$

A segunda equação representa a dinâmica do servomotor, relacionando a aceleração e velocidade angular ($\ddot{\theta}_x(t)$ e $\dot{\theta}_x(t)$) com a tensão de entrada $V_m(t)$, tal que

$$\tau\ddot{\theta}_x(t) + \dot{\theta}_x(t) = K_m V_m(t) \tag{5}$$

Os parâmetros τ e K_m são valores constantes do servomotor e são dados pelo fabricante. Todos os parâmetros citados anteriormente estão apresentados de forma detalhada na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros do sistema *2D ball balancer*.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa da bola (kg)	m_b	0,003
Distâncias do eixo do motor ao ponto de fixação da barra (cm)	r_{arm}	2,54
Raio da bola (cm)	r_b	1,96
Comprimento da mesa (cm)	L_{plate}	27,5
Parâmetro do motor (rad/sV)	K_m	1,76
Parâmetro do motor (s)	τ	0,00285
Momento de inércia de uma esfera sólida (kgcm²)	J_b	0,0046

Considerando o vetor de estado dado em (3), o sinal de controle $u(t) = V_m(t)$ e as equações dadas em (4) e (5), o sistema *2D ball balancer* das Figuras 1 e 2 pode ser representado matematicamente por (1) e (2), sendo que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_m}{\tau} \end{bmatrix} \tag{6}$$
$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

Representação do modelo incerto

Substituindo os valores da Tabela 1 em (4b), tem-se que $K_{bb} = 1{,}3$. Porém, considere que o sistema *2D ball balancer* possua incertezas nos seus parâmetros, limitadas com valores mínimos e máximos, tal que o valor de K_{bb} possa assumir valores que estejam no seguinte intervalo:

$$1{,}3 \leq K_{bb} \leq 1{,}6 \tag{7}$$

Nesse caso, a representação dada em (2) e (3) deve ser reformulada, sendo que uma possível representação do sistema dinâmico incerto é dada por

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \tag{8}$$

$$y(t) = C(\alpha)x(t) \tag{9}$$

sendo que

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i\,, B(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i B_i\,, C(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i C_i,$$

tal que

$$\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1,$$

e considerando r o número de parâmetros incertos distintos do sistema, tem-se que $N = 2^r$.

A representação do modelo (8) e (9) será exemplificada através do modelo matemático do sistema *2D ball balancer*. Observe que, em (7), foi considerado que o sistema possui um parâmetro incerto: K_{bb}. Logo, diz-se que o sistema possui ($N = 2^1$) dois vértices e é representado através de uma combinação convexa desses dois vértices, tal que os vértices 1 e 2 são formados pelos limites inferior e superior de K_{bb}, respectivamente. Ou seja, para $K_{bb} = 1{,}3$, tem-se:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -35{,}08 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 61{,}75 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

e para $K_{bb} = 1{,}6$, tem-se

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -35{,}08 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 61{,}75 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

Projeto de controle robusto usando LMIs

Uma lei de controle bastante utilizada é dada por

$$u(t) = -Kx(t) \tag{10}$$

sendo que $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dessa forma, o sistema (8) em malha fechada, utilizando a lei de controle (10), pode ser representado por

$$\dot{x}(t) = (A(\alpha) - B(\alpha)K)x(t) \tag{11}$$

A estabilidade do sistema em malha fechada, dado (11), pode ser investigada por meio de uma função de Lyapunov $V(x(t))$. Considerando uma função de Lyapunov do tipo quadrática, dada por

$$V\big(x(t)\big) = x(t)^T P x(t)$$

Para que o sistema seja assintoticamente estável no sentido de Lyapunov e possua taxa de decaimento $\rho > 0$, duas condições devem ser verificadas (Boyd et al., 1994):

$$V\big(x(t)\big) > 0, \qquad \forall x(t) \neq 0$$

$$\dot{V}\big(x(t)\big) < -2\rho V(x(t)), \qquad \forall x(t) \neq 0$$

Nesse sentido, considere o teorema dado a seguir (BOYD et al., 1994) e que $X = P^{-1}$.

Teorema 1 *Uma condição suficiente para que se garanta a estabilidade do sistema incerto (11) é a existência de matrizes $X = X^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tais que*

$$XA_i^T - M^T B_i^T + A_i X - B_i M + 2\rho X < 0$$

$$X > 0$$

com $i = 1, \dots, N$. Nesse caso, diz-se que o sistema é assintoticamente estável e possui uma taxa de decaimento $\rho > 0$. O controlador é dado por $K = MX^{-1}$.

O Teorema 1 pode ser utilizado para projetar um controlador K que estabilize e garanta uma taxa de decaimento ρ ao sistema em malha fechada.

Resultados e Discussão

Inicialmente, foi considerada uma taxa de decaimento $\rho = 0$, ou seja, o projeto de controle garante estabilidade ao sistema realimentado. Utilizando o Teorema 1 para $\rho = 0$, foi obtida uma solução factível para as LMIs (utilizando o *SciLab*), e o controlador K encontrado é dado por

$$K = [0{,}018 \quad 0{,}035 \quad 0{,}090 \quad -0{,}544] \qquad (12)$$

Utilizando o *SciLab*, para $K_{bb} = 1{,}4$, simulou-se a resposta dinâmica do sistema realimentado com o controlador dado em (12) considerando uma condição inicial $x(0) = [0{,}5 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$. As variações da posição $d_x(t)$ e da velocidade $\dot{d}_x(t)$ estão apresentadas na Figura 3.

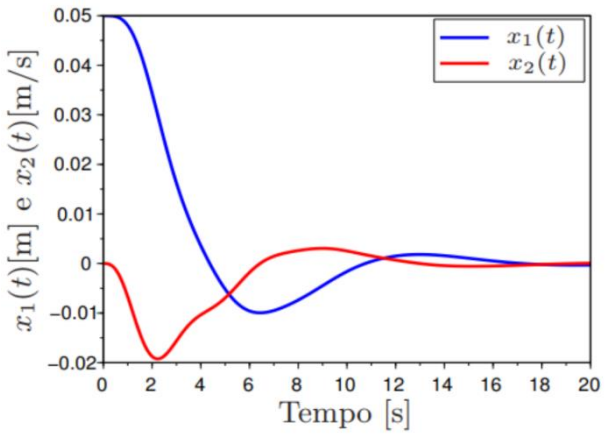

Figura 3. Simulação da resposta temporal do sistema realimentado com o controlador dado em (12) (eixo x).

Analisando a Figura 3, note que o tempo de estabilização do sistema é de aproximadamente 18 segundos. Mesmo que o sistema tenha uma resposta temporal estável, o desempenho do sistema não é adequado, pois o tempo de estabilização é grande. Logo, o controlador K dado em (12) não pode ser implementado na prática. Uma solução é aumentar a taxa de decaimento do sistema, pois este parâmetro está diretamente relacionado ao tempo de estabilização do sistema realimentado.

Utilizando o Teorema 1 para $\rho = 4$, foi obtida uma solução factível para as LMIs (utilizando o *SciLab*), e o controlador K encontrado é dado por

$$K = [335{,}191 \quad 125{,}158 \quad 21{,}866 \quad 0{,}325] \qquad (13)$$

Novamente, utilizando o *SciLab*, para $K_{bb} = 1{,}4$, simulou-se a resposta dinâmica do sistema realimentado com o controlador dado em (12) considerando uma condição inicial $x(0) = [0{,}5 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$. As variações da posição $d_x(t)$ e da velocidade $\dot{d}_x(t)$ estão apresentadas na Figura 4.

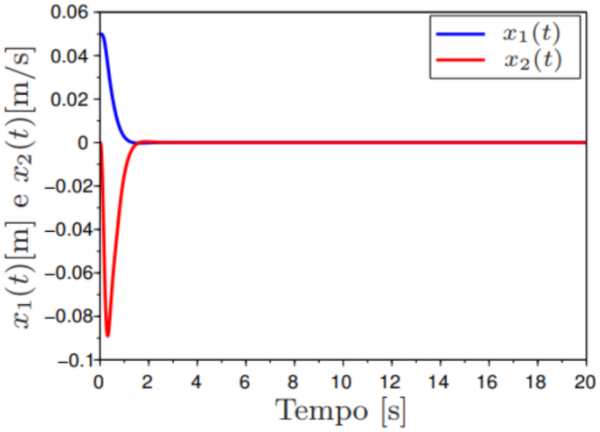

Figura 4. Simulação da resposta temporal do sistema realimentado com o controlador dado em (13) (eixo x).

Analisando a Figura 4, observe que o tempo de estabilização do sistema é de aproximadamente 2s. Este tempo de estabilização possibilita a implementação prática do controlador (13).

Observe que no projeto de controle foi considerado que $1{,}3 \leq K_{bb} \leq 1{,}6$. Já na simulação, foi escolhido um valor que pertence a esse intervalo, tal que $K_{bb} = 1{,}4$. Como previsto em projeto, caso as LMIs garantam a factibilidade para os casos extremos $K_{bb} = 1{,}3$ e $K_{bb} = 1{,}6$, qualquer condição intermediária também tem a garantia de estabilidade com taxa de decaimento ρ.

Implementação prática

Para a implementação, a consideração de que $1{,}3 \leq K_{bb} \leq 1{,}6$ é viável, pois os parâmetros reais da bola podem divergir um pouco dos valores estipulados pelo fabricante.

O controlador K, dado em (13), foi implementado no sistema *2D ball balancer* e os resultados estão apresentados nas Figura 5 e 6. Na Figura 5 são apresentados: a posição $d_x(t)$, a posição angular $\theta_x(t)$ e o sinal de controle $u_x(t)$. Já na Figura 6 são apresentados: a posição $d_y(t)$, a posição angular $\theta_y(t)$ e o sinal de controle $u_y(t)$.

O objetivo da implementação é fazer com que a bola siga uma referência pré-definida, apresentada em vermelho nas Figuras 5 e 6. A referência escolhida foi uma onda quadrada, de amplitude de 5cm.

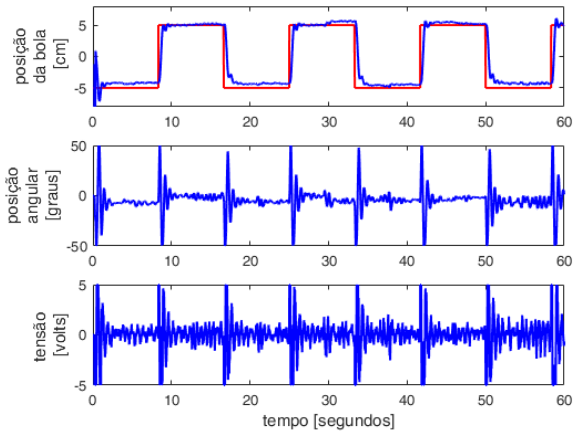

Figura 5. Resposta temporal da implementação do sistema em malha fechada com o controlador (13) (eixo x).

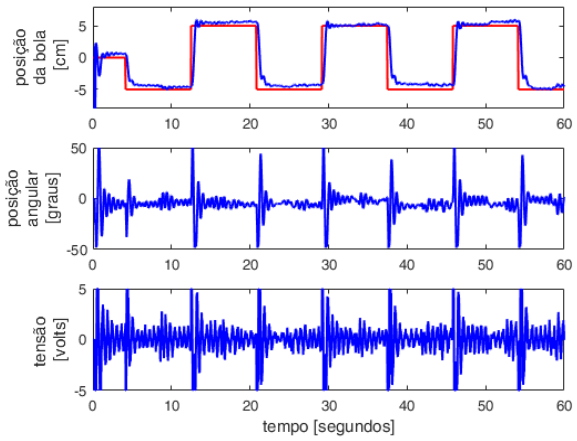

Figura 6. Resposta temporal da implementação do sistema em malha fechada com o controlador (13) (eixo y).

Analisando as Figuras 5 e 6, no primeiro quadro, pode-se observar que o objetivo de controle foi atingido, que é fazer a bola (linha azul) seguir a referência de onda quadrada (linha vermelha). Já no segundo quadro, é possível observar a variação do ângulo de cada servomotor, dado em graus. No terceiro quadro, o sinal de controle é apresentado e observe que os valores ficam entre uma faixa de ±5V.

Considerações Finais

O trabalho propôs o controle robusto de um sistema *2D ball balancer*, considerando que o sistema possui uma incerteza no parâmetro K_{bb}, referente às características da bola. As condições de projeto são apresentadas através de LMIs e resolvidas utilizando o *software* gratuito *SciLab*. Além disso, o mesmo *software* é utilizado para simular o comportamento do sistema, permitindo projetar adequadamente o controlador K para garantir um desempenho satisfatório ao sistema realimentado. Uma implementação prática no sistema *2D ball balancer* validou a metodologia proposta.

Agradecimentos

Ao incentivo financeiro do CNPq e do IFMS através do Edital 028/2019-Propi/IFMS (ID:698). Ao LPC da UNESP/FEIS por permitir a utilização do sistema *2D ball balancer*.

Referências

Souza, W.A., de Oliveira, D.R., Teixeira, M.C.M., Silva, L.S.C., Cardim, R., and Assunção, E. (2014). Projeto e implementação de um controlador robusto chaveado utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno. XX Congresso Brasileiro de Automática.

Quanser, I. (2008). 2D Ball Balancer Controle using QUARC: Instructor Manual, Technical report.

S. Boyd; L. E. Ghaoui; E. Feron; V. Balakrishnan. “Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory”. 2nd. Ed. [S.1.]: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. 193 p. (Studies in Applied Mathematics, 15).